

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS
Linhas de Transmissão

AMILCAR CARELI CÉSAR
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

18 de agosto de 2005

AVISO

Este texto reúne alguns exercícios abordando linhas de transmissão. Alguns exercícios foram extraídos de livros e sites na Internet, enquanto outros foram propostos pelo docente responsável pela disciplina e sugeridos em listas de exercícios para casa. Tenha em mente que foram reunidos para proporcionar mais um instrumento de estudo dos conceitos de ondas eletromagnéticas.

Prof. Amílcar Careli César, São Carlos, SP.

Capítulo 1

LINHAS DE TRANSMISSÃO

1.1 Constante de propagação, velocidade de fase, impedância, coeficiente de reflexão, ROE

Exercício 1 Determinar a impedância característica de uma linha de transmissão que possui capacitância de 35 pF/cm e indutância de $0,25 \text{ } \mu\text{H/cm}$.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,25 \times 10^{-6}}{35 \times 10^{-12}}} = 84,5 \Omega.$$

Exercício 2 Uma linha de transmissão com perdas exibe as seguintes características: $R = 2 \text{ } \Omega/\text{m}$; $G = 0,5 \text{ mS/m}$; $L = 8 \text{ nH/m}$ e $C = 0,23 \text{ pF/m}$. A frequência de operação é 1 GHz . Calcular: 1) A impedância característica; 2) A constante de propagação.

1. A impedância característica de uma linha com perdas é dada por

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}};$$

$$\omega L = 2\pi f = 2\pi \times 10^9 \times 8 \times 10^{-9} = 16\pi;$$

$$\omega C = 2\pi \times 10^9 \times 0,23 \times 10^{-12} = 0,46\pi \times 10^{-3};$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{2 + j16\pi}{0,5 + j0,46\pi \times 10^{-3}}} \cong 180 + j26,5 \cong 182 \angle 8,4^\circ \Omega.$$

2. A constante de propagação de uma linha com perdas é dada por

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{(2 + j16\pi)(0,5 + j0,46\pi) 10^{-3}}$$

$$\gamma = 0,051 + j0,273 = 0,278 \angle 79,4^\circ$$

Em frequências de microondas, $R \ll \omega L$ e $G \ll \omega C$.

Exercício 3 Uma linha de transmissão sem perdas com impedância característica $Z_0 = 300 \text{ } \Omega$ é conectada a uma carga indutiva $Z_L = 100 + j50 \Omega$. A frequência do sinal é 300 MHz . Calcular a impedância em um ponto distante $12,5 \text{ cm}$ da carga.

A impedância em um ponto qualquer da linha é dada por

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \operatorname{tg}(\beta z)}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg}(\beta z)}.$$

Mas,

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}; \lambda \equiv \lambda_0 = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^{10}}{300 \times 10^6} = 100 \text{ cm}.$$

A posição $z_1 = 12,5$ cm equivale a

$$\beta z_1 = \frac{2\pi}{\lambda} z_1 = \frac{2\pi}{100} 12,5 = \frac{2\pi}{100} \frac{12,5}{12,5} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ rad},$$

e $\operatorname{tg}(\beta z_1) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Portanto,

$$Z(z) = 300 \frac{(100 + j50) + j300(1)}{300 + j(100 + j50)} = 300 \frac{100 + j350}{250 + j100}$$

e

$$Z(z) = 248,3 + j320,7 \Omega.$$

Exercício 4 Uma linha de transmissão bifilar sem perdas de $Z_0 = 50 \Omega$ é conectada a uma carga $Z_L = 50 - j30 \Omega$. O dielétrico possui $\varepsilon_r = 2,62$ e a frequência de operação é 100 MHz. Calcular: 1) A impedância em um ponto a 10 cm da carga; 2) O coeficiente de reflexão na carga; 3) A relação de onda estacionária na linha; 4) A relação entre a potência refletida e a potência incidente na carga.

1. impedância

$$\lambda = \frac{v}{f \sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{2,62} \cdot 10^8} = 185 \text{ cm};$$

$$\beta z_1 = \frac{2\pi}{\lambda} z_1 = \frac{2\pi}{185} 10 = \frac{2\pi}{18,5} = 0,108\pi;$$

$$\operatorname{tg} \beta z_1 = \operatorname{tg}(0,108\pi) = 0,353;$$

$$Z(z_1) = 50 \frac{(50 - j30) + j50 \times 0,353}{50 + j0,353(50 - j30)} = 35,5 - j20,6 = 41 \angle -30^\circ \Omega.$$

2. coeficiente de reflexão na carga

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{(50 - j30) - 50}{(50 - j30) + 50} = 0,083 - j0,28 = 0,29 \angle -73^\circ.$$

3. relação de onda estacionária

$$ROE = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = \frac{1 + 0,29}{1 - 0,29} = 1,82.$$

4. relação entre potências

$$\frac{P_r}{P_i} = |\Gamma_L|^2 = 10,291^2 = 0,084.$$

Assim, 8,4% da potência incidente é refletida.

Exercício 5 Uma linha de transmissão de 72Ω está ligada a uma carga de 50Ω . Calcular: 1) O módulo do coeficiente de reflexão; 2) ROE; 3) A porcentagem de potência incidente que é refletida; 4) porcentagem de potência incidente que é absorvida pela carga.

1. coeficiente de reflexão

$$|\Gamma_L| = \left| \frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_C + Z_0)} \right| = \frac{72 - 50}{72 + 50} = 0,18.$$

2. ROE

$$ROE = \frac{1 + |\Gamma_C|}{1 - |\Gamma_C|} = \frac{1 + 0,18}{1 - 0,18} \simeq 1,44.$$

3. potência refletida

$$\text{Como } P_R = \frac{V_r^2}{Z_L} \text{ e } P_i = \frac{V_i^2}{Z_L},$$

$$\frac{P_R}{P_i} = \frac{V_r^2/Z_L}{V_i^2/Z_L} = \left(\frac{V_r}{V_i} \right)^2 = |\Gamma_L|^2,$$

$$\frac{P_R}{P_i} = 0,18^2 = 0,0324 \quad \text{ou} \quad 3,24\%.$$

4. potência absorvida

$$P_{\text{absorvida}} = 1 - 0,0324 = 0,968 \quad \text{ou} \quad 96,8\%.$$

Exercício 6 Mostrar que se $Z(z_{\min}) = \frac{Z_0}{ROE}$, então $Z_C = \frac{(1-jROE \operatorname{tg} \beta z_{\min})}{(ROE - j \operatorname{tg} \beta z_{\min})}$.

A impedância em qualquer ponto da linha é dada por

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_C + jZ_0 \operatorname{tg} \beta z}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg} \beta z}.$$

$$\text{Para } z = z_{\min} \quad e \quad Z(z_{\min}) = \frac{Z_0}{ROE},$$

$$Z(z_{\min}) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \operatorname{tg} \beta z_{\min}}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg} \beta z_{\min}}$$

$$\frac{Z_0}{ROE} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \operatorname{tg} \beta z_{\min}}{Z_0 + jZ_L \operatorname{tg} \beta z_{\min}}$$

$$Z_L = Z_0 \frac{1 - jROE \operatorname{tg} \beta z_{\min}}{ROE - j \operatorname{tg} \beta z_{\min}}$$

O valor do comprimento de onda, λ , na linha é conhecido a partir da medida de $\frac{\lambda}{2}$ (distância entre 2 mínimos adjacentes). O valor de z_{\min} correspondente ao primeiro mínimo depois da carga (mínimo mais próximo da carga).

Exercício 7 Da medida de $R0E$ e Z_{\min} ao longo de uma linha de transmissão sem perdas resulta $R0E = 3,5$ e $Z_{\min} = 8\Omega$. Se o comprimento de onda da sinal é $\lambda = 50\text{ cm}$, determinar a impedância de carga Z_L . A impedância característica da linha é $Z_0 = 72\ \Omega$. A distância z_{\min} corresponde ao mínimo mais próximo da carga.

Temos que

$$Z_C = Z_0 \frac{1 - jR0E \operatorname{tg}(\beta z_{\min})}{R0E - j \operatorname{tg}(\beta z_{\min})}$$

$$Z_C = 72 \frac{1 - j3,5 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{50} 8\right)}{3,5 - j \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{50} 8\right)} = 72 \frac{1 - j5,51}{3,5 - j1,57}$$

$$Z_C = 59,5 - j86,6\ \Omega.$$

1.2 Circuitos de adaptação de impedâncias

Exercício 8 Uma fonte de sinal de impedância interna $Z_S = 100\text{ ohms}$ está conectada a uma carga $Z_L = 200\text{ ohms}$ por meio de uma linha de transmissão de impedância característica Z_0 . A frequência de operação é $f = 800\text{ MHz}$.

Projetar um circuito de adaptação de impedâncias composto por um transformador de um quarto de onda com material caracterizado por $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. Determinar a impedância característica da linha, Z_0 e o comprimento, D ;

Projetar um circuito para adaptar as impedâncias da fonte e de carga, agora $Z_L = 100 + j100\text{ ohms}$. O circuito de adaptação de impedâncias é composto por um indutor L em série com uma linha de transmissão de impedância característica $Z_0 = 100\text{ ohms}$ e material caracterizado por $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$.

1. A Figura 1 mostra a fonte e a carga interligadas por meio de uma linha de transmissão.

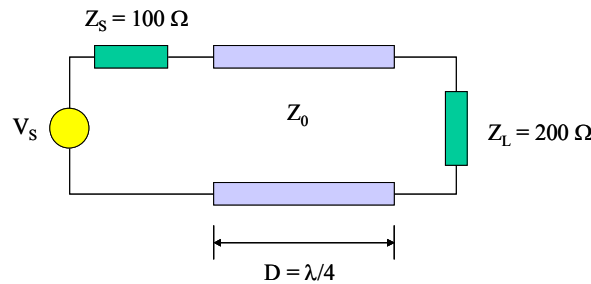


Figura 1 Transformador de um quarto de onda usado para adaptar duas impedâncias.

A Figura 2 mostra o transformador de um quarto de onda.

A impedância Z_1 vista na entrada do transformador é

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \operatorname{tg}(\beta D)}{Z_0 + jZ_2 \operatorname{tg}(\beta D)} \quad (1.1)$$

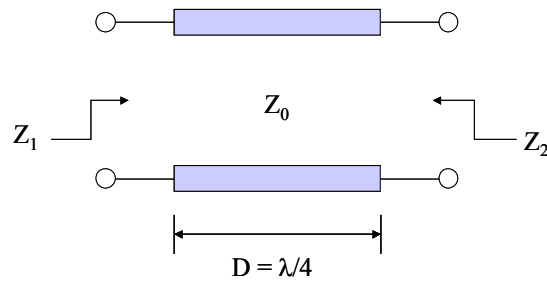


Figura 2 Transformador de um quarto de onda.

na qual β é a constante de propagação na linha. Mas, $\beta D = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{tg}(\beta D) \rightarrow \infty$. Rescrevendo (1.1),

$$Z_1 = Z_0 \frac{\left[\frac{Z_2}{\text{tg}(\beta D)} \right] + jZ_0}{\left[\frac{Z_0}{\text{tg}(\beta D)} \right] + jZ_2}$$

Se $\text{tg}(\beta D) \rightarrow \infty$, $Z_1 = Z_0 \frac{jZ_0}{jZ_2}$ e $Z_1 = \frac{Z_0^2}{Z_2}$. Portanto, $Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2}$. No caso,

$$Z_0 = \sqrt{100 \times 200} = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ ohms}$$

O comprimento da linha é

$$D = \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{4}} = \frac{\lambda_0}{8} = \frac{c}{8f} = \frac{3 \times 10^8}{8 \times 8 \times 10^8} = \frac{3}{64} = 4,7 \text{ cm}$$

2. A Figura 3 mostra o circuito com os valores normalizados das impedâncias e os níveis em vários pontos.

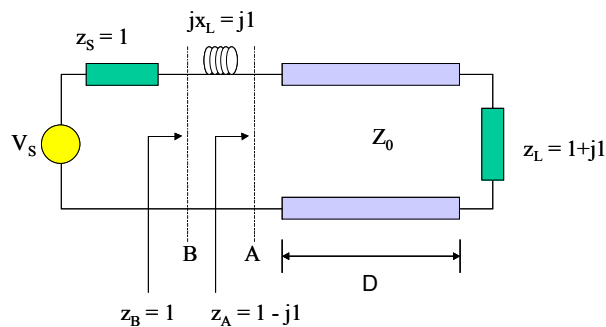


Figura 3 Valores normalizados das impedâncias em vários pontos.

O valor normalizado da impedância em B deve ser $z_B = 1$ (isto é, $Z_B/100$). O valor normalizado da impedância de carga é $z_L = 1 + j1$. A solução do problema é sair de z_L e chegar a z_B . Deve-se percorrer a distância D na linha desde z_L até $z_A = 1 - j1$. Acrescenta-se $j1$ a z_A , de tal forma que $z_B = z_A + j1 = 1 - j1 + j1 = 1$.

Desta maneira, a impedância vista pela fonte na entrada da linha é $Z_S = Z_B = 100$ ohms. Assim,

$$z_A = \frac{Z_A}{Z_0} = z(D) = \frac{z_L + j \operatorname{tg}(\beta D)}{1 + j z_L \operatorname{tg}(\beta D)}$$

Resolvendo para $\operatorname{tg}(\beta D)$,

$$\operatorname{tg}(\beta D) = \frac{z_L - z_A}{j(z_A z_L - 1)} = \frac{(1 + j1) - (1 - j1)}{j[(1 + j1)(1 - j1) - 1]} = \frac{j2}{j(2 - 1)} = 2$$

Portanto, $\operatorname{tg}(\beta D) = 2 \rightarrow \beta D = \pi/3 \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} D = \frac{\pi}{3} \rightarrow D = \lambda/6$. O valor de D é

$$D = \frac{\lambda}{6} = \frac{\lambda_0}{6\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{6\sqrt{4}} = \frac{\lambda_0}{12} = \frac{c}{12f} = \frac{3 \times 10^8}{12 \times 8 \times 10^8} = \frac{3}{96} = 3,2 \text{ cm}$$

O valor da impedância referente ao indutor é

$$(j1) \times 100 = j100 = jX_L = j\omega L \rightarrow \omega L = X_L \rightarrow 2\pi f L = X_L \rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f}$$

Assim,

$$L = \frac{100}{2\pi \times 8 \times 10^8} = \frac{1}{16\pi} \frac{10^2}{10^8} = \frac{10^3}{16\pi} \times 10^{-9} \approx 20 \text{ nH}$$

1.3 Propagação de pulsos em linhas de transmissão

Exercício 9 Uma fonte de tensão excita um circuito digital do tipo flip-flop por meio de uma linha de transmissão. A fonte é representada pelo circuito equivalente de Thevenin, gerando uma função degrau de 10 volts de amplitude, sendo a impedância interna 200 ohms. A linha de transmissão possui impedância característica $Z_0 = 50$ ohms, comprimento $L = 5$ centímetros e é fabricada com material caracterizado por $\mu = \mu_0$ e $\epsilon = 4\epsilon_0$. A impedância de entrada do circuito flip-flop é 200 ohms e ele muda de estado quando a tensão em sua entrada alcança o valor 5 volts.

1) Desenhar a distribuição de tensão na linha, $V(z)$, no instante $t = 1,5 \times 10^{-10}$ segundos. Indicar todos os valores numéricos no gráfico;

2) Desenhar a distribuição de tensão de entrada do circuito flip-flop, $V_L(t)$, desde $t = 0$ até o instante que o flip-flop muda de estado. Indicar todos os valores numéricos no gráfico;

3) Calcular o valor assintótico de $V_L(t)$ conforme $t \rightarrow \infty$;

4) Determinar o valor da impedância característica da linha para qual o tempo de mudança de estado do flip-flop é o menor possível. Qual é valor deste tempo de comutação?

A velocidade de fase (velocidade de propagação da forma de onda degrau de tensão) na linha é

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^{10}}{\sqrt{4}} = 1,5 \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

O intervalo de tempo para a frente da forma de onda degrau de tensão percorrer a distância L é

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{L}{c/\sqrt{\epsilon_r}} = \sqrt{\epsilon_r} \frac{L}{c} = \sqrt{4} \frac{5}{3 \times 10^{10}} \frac{\text{cm}}{\text{cm/s}} = 3,3 \times 10^{-10} \text{ segundos}$$

1. No intervalo entre $t = 0$ e $t = 1,5 \times 10^{-10}$ segundos a distância percorrida é

$$\Delta x = 5 \frac{1,5 \times 10^{-10}}{3,3 \times 10^{-10}} \approx 2,3 \text{ cm}$$

Como ainda não ocorreu a primeira reflexão na carga, o gerador "enxerga" apenas a impedância característica da linha. A tensão na entrada da linha é

$$V_{\text{linha}} = V_0 \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = 10 \frac{50}{50 + 200} = \frac{500}{250} = 2 \text{ V}$$

O gráfico representando $V_{\text{linha}}(x)$ é mostrado na Figura 4.

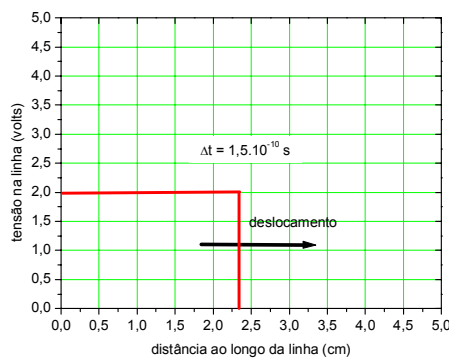


Figura 4 tensão na linha em função da distância. No intervalo de tempo $\Delta t = 1,5 \times 10^{-10}$ s o pulso percorre 2,3 cm.

2. O coeficiente de reflexão no gerador é

$$\Gamma_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0} = \frac{200 - 50}{200 + 50} = \frac{150}{250} = 0,6$$

O coeficiente de reflexão na carga é

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{200 - 50}{200 + 50} = \frac{150}{250} = 0,6$$

A tensão na linha antes da primeira reflexão é

$$V_0 = V_{\text{linha}} = 2 \text{ V}$$

Após a primeira reflexão na carga é

$$V_1 = V_0 + \Gamma_L V_0 = V_0(1 + \Gamma_L) = 2(1 + 0,6) = 3,2 \text{ V}$$

Após a primeira reflexão no gerador é

$$V_2 = V_0 + \Gamma_G V_1 = 2 + 0,6 \times 3,2 = 3,92 \text{ V}$$

Após a segunda reflexão na carga é

$$V_3 = V_0 + \Gamma_L V_2 = 2 + 0,6 \times 3,92 = 4,352 \text{ V}$$

Após a segunda reflexão no gerador é

$$V_4 = V_0 + \Gamma_G V_3 = 2 + 0,6 \times 4,352 = 4,611 \text{ V}$$

Após a terceira reflexão na carga é

$$V_5 = V_0 + \Gamma_L V_4 = 2 + 0,6 \times 4,611 = 4,766 \text{ V}$$

Após a terceira reflexão no gerador é

$$V_6 = V_0 + \Gamma_G V_5 = 2 + 0,6 \times 4,766 = 4,86 \text{ V}$$

Após a quarta reflexão na carga é

$$V_7 = V_0 + \Gamma_L V_6 = 2 + 0,6 \times 4,86 = 4,916 \text{ V}$$

Após 7 reflexões (3 no gerador e 4 na carga), o valor de tensão de 5 volts na entrada do flip-flop ainda não foi atingido. Já se passaram $9\Delta t = 9 \times 3,3 \times 10^{-10} = 29,7 \times 10^{-10}$ segundos e o flip-flop ainda não mudou de estado. O gráfico $V_L(t)$ é mostrado na Figura 5.

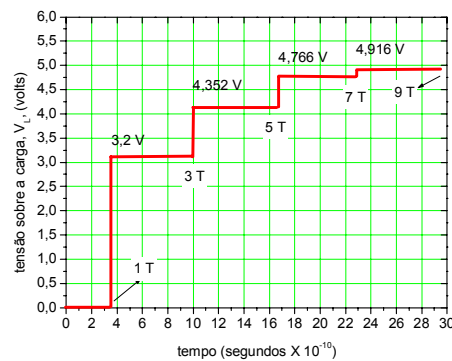


Figura 5 Gráfico da tensão sobre a carga em função do tempo. 1T corresponde a $3,3 \times 10^{-10}$ segundos, que é o intervalo de tempo para que o pulso percorra os 5 centímetros da linha de transmissão e alcance a carga (flip-flop).

3. Conforme $t \rightarrow \infty$, a tensão na entrada do flip-flop tende a

$$V_L(t \rightarrow \infty) = V_0 \frac{Z_L}{Z_L + Z_G} = 10 \frac{200}{200 + 200} = 10 \frac{2}{4} = 5 \text{ V.}$$

Portanto, somente quando $t \rightarrow \infty$ a tensão na entrada do flip-flop atinge 5 V. Assim, ele não muda de estado imediatamente quando a forma de onda degrau de tensão o atinge pela primeira vez.

4. A condição para que a tensão na entrada do flip-flop seja 5 V pode ser determinada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V_{linha} &= V_0 \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \rightarrow V_{linha} Z_G = (V_0 - V_{linha}) Z_0 \rightarrow \\ Z_0 &= \frac{V_{linha}}{V_0 - V_{linha}} Z_G = \frac{5}{10 - 5} Z_G = Z_G \end{aligned}$$

Portanto, a condição $Z_0 = Z_G$ deve ser satisfeita.

Assim que a carga é atingida pelo degrau de tensão, $V_L = V_0 + \Gamma_L V_0$.

Para que $V_L = V_0 \rightarrow \Gamma_L = 0$. Para que esta condição seja satisfeita, $Z_0 = Z_L$. Desta forma, $Z_0 = Z_G = Z_L = 200 \Omega$.

O menor intervalo de tempo de comutação é aquele correspondente ao tempo para que degrau de tensão atinja pela primeira vez a carga. Portanto, $\Delta t = 3,3 \times 10^{-10}$ segundos.