

# Análise de sistemas não-lineares

Profa. Vilma A. Oliveira      José Ricardo Rosolen

Março 2011

## 1 Introdução

A abordagem de controle de sistemas não-lineares via aproximações lineares em torno de pontos de equilíbrio pode não ser eficiente para sistemas com dinâmica de alta velocidade e/ou de grande alcance. Existem duas categorias de controle: problema de estabilização (regulação) e o problema de seguimento de trajetória (tracking). Como exemplos do primeiro caso pode-se citar o controle de posição de robôs manipuladores, controle de atitude de aviões, e para o segundo caso o controle de avião para seguir um certo caminho específico, controle de manipulador robótico para desenhar linhas ou círculos. Nestas notas apresentam-se exemplos do uso de controle não linear para motivação, técnicas de análise de estabilidade de sistemas não lineares e finalmente, conceitos de mapas de Poincaré e bifurcações.

Os livros utilizados na elaboração destas notas no tema análise de estabilidade foram [1, 2] e no tema mapas de Poincaré e bifurcações [3, 4].

### 1.1 Alguns exemplos

Seja

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x^3 + u \\ y &= x\end{aligned}$$

com  $\theta = 1$ . Obter uma lei de controle para levar a saída para zero. Inicialmente obtém-se uma lei de controle do tipo  $u = -kx$ , considerando o sistema linearização em  $x = 0$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ y &= x\end{aligned}$$

O sistema a malha fechada é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \theta x^3 - kx = x(x^2 - k/\theta) \\ y &= x\end{aligned}$$

que apresenta os seguintes pontos de equilíbrio  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{k/\theta}$ . O ponto  $x = 0$  é estável e  $x = \pm\sqrt{k/\theta}$  é instável. Portanto, não importa o valor de  $k$ , não se obtém estabilidade global assintótica. Suponha agora a lei de controle não linear

$$u = -\theta x^3 - kx$$

para  $k > 0$ . Com esta lei de controle obtém-se estabilidade global assintótica.

Seja a equação de fluxo de um sistema de controle de nível de um tanque

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \frac{1}{A_T}(Q_i - Q_o) \\ y &= h \end{aligned}$$

onde  $Q_o = \sqrt{h}$  é a vazão de saída,  $Q_i$  é a vazão de entrada e  $A_T$  é a área da seção do tanque. A lei de controle  $u = A_T k_p e + Q_o$  com  $e = h_d - h$  fornece a equação do erro  $\dot{e} + k_p e = 0$  que estabiliza o sistema para algum  $k > 0$ . A lei de controle fornece a equação do erro que estabiliza o sistema para algum  $k > 0$ .

## 2 Análise de sistemas não-lineares

Os métodos mais conhecidos de análise de sistemas não-lineares são o **Plano de Fase** que é um método gráfico de análise de sistemas não-lineares de 2a. ordem a partir da solução do sistema não-linear do sistema em torno dos pontos de equilíbrio e a **Teoria de Lyapunov**. Na teoria de Lyapunov existem o método direto (generalização do conceito de energia associada a sistemas mecânicos) e método indireto (método de linearização). No método direto a idéia é construir funções escalares do tipo energia (função de Lyapunov) para o sistema e analisar se a energia decresce.

Tratam-se nestas aulas da análise de sistemas dinâmicos utilizando [1, 2], incluindo definições de estabilidade e bifurcação para sistemas contínuos e, e da construção de mapas de Poincaré utilizando [3, 4]. Os conceitos básicos de estabilidade de sistemas dinâmicos, incluindo linearização de sistemas e classificação de pontos fixos, tanto de sistemas contínuos no tempo quanto de mapas [4], [3] são revistos. Apresenta-se o método direto de Lyapunov que é também conhecido como 2o. método de Lyapunov. Finalmente, estabelece-se uma relação entre os pontos fixos dos mapas de Poincaré e as órbitas periódicas dos sistemas contínuos correspondentes. Um estudo aprofundado do *oscilador de Duffing* para ajudar no entendimento dos mapas de Poincaré é incluído, destacando-se como a topologia do sistema se altera conforme alteram-se os valores de parâmetros do sistema. Finalmente,

## 3 Linearização e Estabilidade Local

### 3.1 Sistemas contínuos no tempo

Considere um sistema da forma

$$\dot{x} = F(x; u) \tag{1}$$

em que  $u$  é o vetor das variáveis de controle.

**Definição 1** Um estado  $x_0$  é um estado de equilíbrio ou ponto de equilíbrio do sistema ou ponto fixo se uma vez igual  $x(t)$  igual a  $x_0$ ,  $x(t)$  permanece em  $x_0$  para todo tempo futuro.

**Definição 2** Diz-se que  $x_0$  é um ponto fixo para  $u = u_0$ , se  $F(x_0, u_0) = 0$

**Definição 3** O estado de equilíbrio  $x = 0$  é estável se para  $R > 0$  existe  $r > 0$  tal que  $\|x(0)\| < r$ , então  $\|x(t)\| < R$  para todo  $t \geq 0$ . Senão o equilíbrio é instável.

Sejam  $B_r$ : região esférica definida por  $\|x\| < r$  e  $S_R$ : região esférica definida por  $\|x\| = R$ . Tem-se  $\forall R > 0, \exists r > 0, \|x(0)\| < r$  implica  $\forall t \geq 0, \|x(t)\| < R$  ou  $\forall R > 0, \exists r > 0, x(0) \in B_r < r$  implica  $\forall t \geq 0, x(t) \in B_R$ .

**Definição 4** Um ponto de equilíbrio  $x = 0$  é assintoticamente se for estável e se em adição existe algum  $r > 0$  tal que  $\|x(0)\| < r$  implica  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.1.1 Plano de fase

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

com  $x = [x_1, x_2]^T$  a solução do sistema acima para  $x_0 = [x_{10}, x_{20}]^T$ , i.e.  $x_0 = x(0)$ . O lugar no plano  $x_1 - x_2$  da solução  $x(t)$  para  $t \geq 0$  é uma curva que passa pelo ponto  $x_0$ . Esta curva é chamada de trajetória ou órbita do sistema a partir de  $x_0$ . O plano  $x_1 - x_2$  é chamado plano de fase.

**Exemplo 1** Considere o modelo espaço de estado de um circuito diodo túnel

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + u]\end{aligned}$$

Adotando  $u = 1.2V, R = 1.5k\Omega, C = 2pF, L = 5\mu H, t$  em nanosegundos e a corrente  $x_2$  e  $h(x_1)$  em mA tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0.5[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= 0.2[-x_1 - 1.5x_2 + 1.2]\end{aligned}$$

Suponha

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

Os pontos de equilíbrio correspondem a  $h(x_1) = \frac{u}{R} - \frac{1}{R}x_1$  e são dados por  $Q_1 = (0.063, 0.758), Q_2 = (0.285, 0.61)$  e  $Q_3 = (0.884, 0.21)$ . A Figura 1 ilustra o comportamento do sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio.

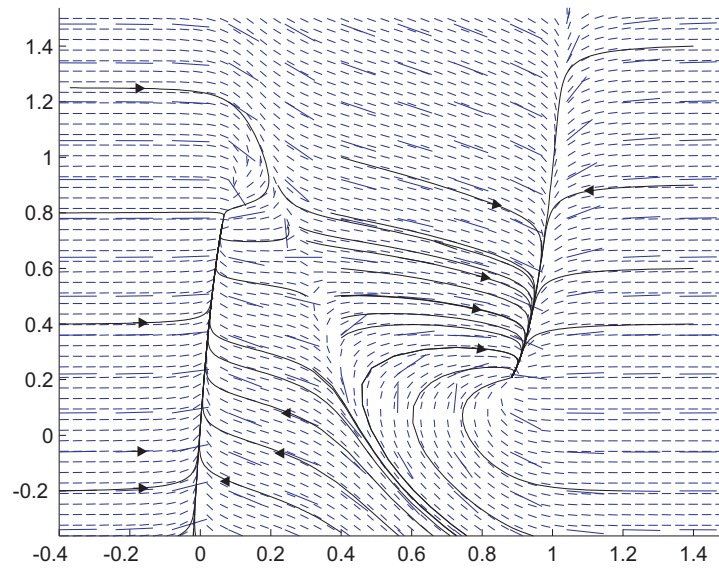


Figura 1: Plano de fase: pontos de equilíbrio  $Q_1 = (0.063, 0.758)$ ,  $Q_2 = (0.285, 0.61)$  e  $Q_3 = (0.884, 0.21)$

### Programa Matlab

```
% Plano de fase circuito diodo tunel
```

```
%Programa principal
```

```
clear all
```

```
close all
```

os autovetores  $v$  associados aos autovalores do ponto de sela  $p + \alpha v$  com  $p$  o ponto de equilíbrio  $[-3 \ 0]$  podem ajudar a construir o plano de fase próximo à sela.

```
t=[0:0.001:10];
```

```
%condi\{c}\~{a}o inicial
```

```
xi=[-0.4 1.6;-0.37 1.25;-0.4 1;-0.4 0.2;0.7 -0.35;0.8 -0.4;1.6 -0.3;1.6 0.8;  
0.75 -0.3;0.4 0.2;0.28 0.6;0.286 0.64;0.284 0.60];
```

```
for i=1,12
```

```
% chama equação espa\{c}o de estado
```

```
[tempo,x]=ode45('diodo',t,xi(i,:));
```

```
figure(1)
```

```

plot(x(:,1),x(:,2));

hold on
end;
% chamar a função e plotar novamente a solu\c{c}\~{a}o para as
condi\c{c}ao iniciais

grid

% Fun\c{c}\~{a}o (equa\c{c}\~{a}o diferencial do circuito)

function [xdot]=diodeo(t,x);

xdot=[.5*(-(17.76*x(1)-103.79*x(1)^2+229.62*x(1)^3-226.31*x(1)^4+
83.72*x(1)^5)+x(2)); .2*(-x(1)-1.5*x(2)+1.2)];

```

**Exemplo 2** *Considere as equações de um pêndulo simples:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (-10/0.5) * \sin(x(1)) - (0.5/1) * x(2) \end{aligned}$$

*Plotar o plano de fase pêndulo simples usando campo de vetores.*

### Programa Matlab

Plano de fase

```

n = 100
% Escala das setas
escala = .5
% Definir Numero de Pontos em Cada Eixo
npont=20;

% área onde será plotado os vetores
xp = [-5 5;-10 10]; %para pendulo
%xp = [-2 2;-4 4];
x1min = xp(1,1);
x1max = xp(1,2);
x2min = xp(2,1);
x2max = xp(2,2);

deltx1=(x1max-x1min)/npont;
deltx2=(x2max-x2min)/npont;

```

```

compr=sqrt(deltx1^2+deltx2^2)/2;

%seleciona o quadro gráfico
figure (1)
% Fixar Janela de Grafico
hold off;
i=0;
j=0;
% Desenhar o Campo de Vetores
for x1=x1min:deltx1:x1max           %varia de x1min a x1max com passo deltax1
    i=i+1;
    for x2=x2min:deltax2:x2max       %varia de x2min a x2max com passo deltax2
        x = [x1 x2]; t=0;
        xponto = sistema(t,x);       %calcula a xdot para t = 0 e x = [x1 x2]
        m = xponto(2)/(xponto(1)+1e-8);
        dx1 =compr/sqrt(1+m^2);
        j=j+1;
        dx2 = m*dx1;

        if x2 < 0
            dx2 = -dx2;
            dx1 = -dx1;
        end

        dx(j,i) = dx1*.5;
        dy(j,i) = dx2*.5;

        hold on;
    end
    j=0;
end

% Mapa vetorial
[x,y] = meshgrid(x1min:deltax1:x1max,x2min:deltax2:x2max);
quiver(x,y,dx*.5,dy*.5,escala);

axis([x1min x1max x2min+deltax2 x2max+deltax2]);

% Tempo
t=linspace(0,10,n);

R = 1;
Naux = 10;
Maux = 10;

```

```

N = round(Naux);
M = round(Maux);

for I = 1:N+1,
    for J = 1:M+1,
        A(R,1) = x1min+((x1max-x1min)/N)*(I-1);
        A(R,2) = x2min+((x2max-x2min)/M)*(J-1);
        R=R+1;
    end
end

xi = A;

% Obtem para a matriz de condicoes iniciais xi as trajetórias de um pendulo
% simples

hold on;
for i = 1:(N*M),
    [tempo,x] = ode45('sistema',t,xi(i,:));
    plot(x(:,1),x(:,2));
end

```

### 3.1.2 Linearização na vizinhança de um ponto fixo (método indireto)

Pode-se estudar a estabilidade de (1) na vizinhança de um ponto fixo (também chamado de ponto de equilíbrio) de um sistema não linear qualquer, fazendo uma linearização neste ponto via o chamado método indireto ou primeiro método de Lyapunov). Suponha que  $x_e, u_e$  seja um ponto fixo de (1). Para uma pequena perturbação  $y$  e  $v$  tem-se

$$x = x_e + \zeta, u = u_e + v. \quad (2)$$

Substituindo agora (2) em (1) obtém-se

$$\dot{\zeta} = F(x_e + \zeta, u_e + v) \quad (3)$$

Assim, transforma-se o ponto fixo  $(x_e, u_e)$  de (1) no ponto fixo  $(\zeta_e, v_e)$  de (3). Supondo  $F$  na classe  $C^2$ , no mínimo, pode-se expandir (3) em uma série de Taylor em torno do ponto  $(x_e, u_e)$ , e então

$$\dot{\zeta} = F(x_e, u_e) + [grad_x F]^T|_{x_e, u_e} \zeta + [grad_u F]^T|_{x_e, u_e} v + (\text{termos ordem superior})$$

onde  $[grad_x F]^T = \frac{\partial F}{\partial x}$  e  $[grad_u F]^T = \frac{\partial F}{\partial u}$  são as matrizes Jacobianas de  $F(x, u)$ . em relação a  $x$  e  $u$ , respectivamente. Dessa forma

$$\dot{\zeta} \approx [grad_x F]^T|_{x_e, u_e} \zeta + [grad_u F]^T|_{x_e, u_e} v = A\zeta + Bv \quad (4)$$

com  $A$  e  $B$  calculadas em  $(x_e, u_e)$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x=x_e, u=u_e}$$

**Classificação de pontos fixos (pontos de equilíbrio)** O ponto fixo agora é classificado analisando-se a natureza dos auto-valores da matriz  $A$  correspondente. Se todos os autovalores tiverem parte real não nula, então dizemos que o ponto fixo  $x_e$  é um *ponto fixo hiperbólico*, caso contrário, dizemos que  $x_e$  é um *ponto fixo não hiperbólico*.

Para haver estabilidade da origem requer-se que o ângulo entre o vetor  $x$  e vetor velocidade  $\dot{x}$  seja maior do que  $90^\circ$  quando uma componente do vetor velocidade aponta para a origem (a outra é ortornormal ao vetor  $x$ ) [7], isto é:

$$\frac{x^T \dot{x}}{|x||\dot{x}|} = \cos(\alpha) < 0. \quad (5)$$

De fato, uma vez que  $\dot{x} = Ax$ , tem-se que  $x^T Ax < 0$ , o que implica  $\text{real}(\lambda(A)) < 0$ .

#### –Pontos fixos hiperbólicos

**Definição 5** *Se todos os autovalores de  $A$  tem parte real negativa, diz-se que  $x_0$  é assintoticamente estável, pois  $x \rightarrow x_e$  quando  $t \rightarrow \infty$ , e então o ponto fixo é chamado de sumidouro (sink).*

Há dois tipos de sumidouro: se todos os autovalores tiverem parte imaginária nula um *nó estável*, caso contrário, tem-se um o *foco estável*.

**Definição 6** *Se todos os autovalores de  $A$  têm parte real positiva, então  $x$  se afasta de  $x_e$  quando  $t \rightarrow \infty$ , então  $x_e$  é um ponto fixo instável e é chamado de fonte (source).*

Da mesma maneira que no caso do sumidouro, tem-se dois tipos de fontes: o *foco instável*, se algum autovalor tiver parte imaginária não nula; e o *nó instável*, no caso contrário.

**Definição 7** *Se alguns dos autovalores, mas não todos, têm parte real positiva, enquanto o resto tem parte real negativa,  $x_e$  é chamado de ponto de sela. Como a sela tem alguns autovalores positivos, é também é instável.*

**Definição 8** *Um ponto fixo é instável se um ou mais autovalores de  $A$  tiver parte real positiva.*



–Pontos fixos não hiperbólicos

**Definição 9** Se um ou mais autovalores de  $A$  tiver parte real negativa enquanto os outros tiverem parte real nula, então  $x_e$  é um ponto fixo marginalmente estável.

**Definição 10** Se todos os autovalores de  $A$  são puramente imaginários, o ponto fixo é então chamado de centro.

A Figura 2 mostra um resumo de todos os casos que podem acontecer a um sistema no  $\mathbb{R}^2$  e a Figura 3 as respostas no tempo para pontos de equilíbrio do tipo foco, nó e sela. Os autovalores das matrizes Jacobianas nos pontos de equilíbrios do Exemplo 1 são  $-3.57, -0.33, 1.77, -0.25, -1.33, -0.4$ . Assim,  $Q_1$  é um nó estável,  $Q_2$  um ponto de sela e  $Q_3$  um nó estável (colocar as setas no plano de fase).

Resumo da classificação dos pontos fixos em 2 dimensões (estabilidade linear).

Autovalores	Sinal da parte real	Representação no plano complexo	Ponto fixo	Exemplo	Estabilidade
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó (hiperbólico)		assintoticamente estável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó (hiperbólico)		instável
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela (hiperbólico)		instável
$\lambda_1 = \lambda_2^*$ (complexos conjugados)	positiva		foco (hiperbólico)		instável
	negativa		foco (hiperbólico)		assintoticamente estável
	nula		centro (elíptico) CASO DEGENERADO		estável (não assintoticamente)
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$	nula	CASOS DEGENERADOS (elípticos)			
$\lambda_1 = \lambda_2, \neq 0 \in \mathbb{R}$	positiva		"inflected node" (hiperbólico)		instável
	negativa		"inflected node" (hiperbólico)		assintoticamente estável

Figura 2: Pontos fixos de sistemas no plano [4].

**Teorema 1 (Método de Linearização de Lyapunov)** Se o sistema linearizado é assintoticamente estável então o ponto de equilíbrio do sistema não-linear é assintoticamente estável. Se o sistema linearizado é instável então o ponto de equilíbrio do sistema não-linear é instável.

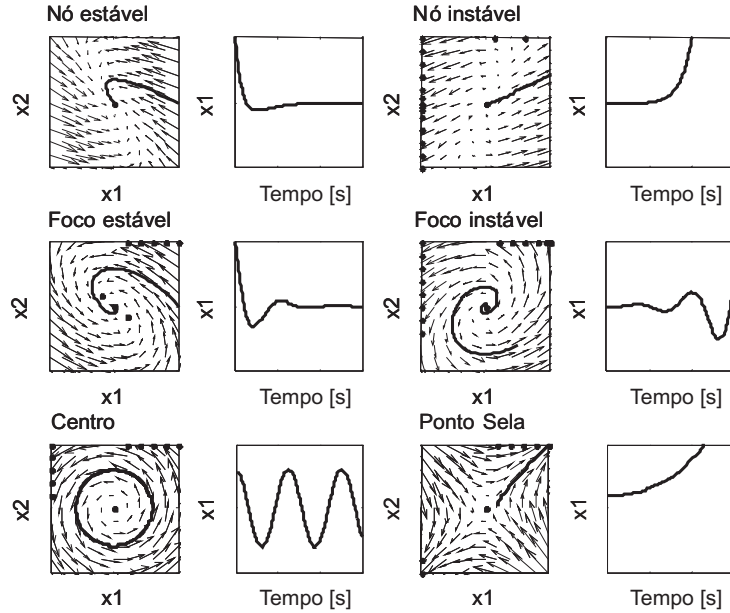


Figura 3: Trajetórias no plano de fase e trajetórias no tempo [7]. (figequil.m)

Assim, pode ser feita uma relação direta entre a estabilidade local de um ponto fixo de um sistema não-linear com a estabilidade de seu correspondente sistema linear. Por exemplo, se a correspondente linearização de um sistema apresentar um ponto fixo assintoticamente estável, então pode-se concluir que o ponto fixo correspondente do sistema não linear também é estável. Assim, justifica-se o uso de técnicas lineares para o controle de sistemas não-lineares na prática. Ressalta-se porém, que essa correspondência não é válida para o caso do sistema linearizado apresentar um ponto fixo marginalmente estável ou um centro, sendo nesse caso necessária uma análise mais profunda do sistema não-linear.

**Definição 11** *Um ponto de equilíbrio estável segundo Lyapunov o qual não é assintoticamente estável é dito ser marginalmente estável.*

**Exemplo 3** *Considere as equações de um pêndulo simples:*

$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + MgR\text{sen}\theta = 0$$

definindo  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{MR^2}x_2 - \frac{g}{L}\text{sen}x_1 \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio são localizados em  $(n\pi, 0)$ , para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . A partir da descrição física do pêndulo, é claro que o pêndulo tem somente duas posições de equilíbrio correspondente à posição vertical abaixo  $(0, 0)$  e à posição vertical acima  $(\pi, 0)$ . Os outros

pontos de equilíbrio são repetições destas duas posições a quais correspondem ao número de giros completos do pêndulo antes de parar em um dos dois pontos de equilíbrio. O sistema linearizado em torno de  $(\pi, 0)$  é dado por  $\ddot{\tilde{\theta}} + \frac{b}{MR^2}\tilde{\theta} - \frac{g}{R}\tilde{\theta} = 0$  (usa-se a aproximação  $\text{sen}\theta = \text{sen}(\tilde{\theta} + \pi) = \text{sen}\tilde{\theta}\cos\pi + \text{sen}\pi\cos(\tilde{\theta}) = -\text{sen}(\tilde{\theta}) \approx -\tilde{\theta}$  com  $\tilde{\theta} := \theta - \pi$  (foi feita uma mudança de variável uma vez que o ponto de equilíbrio é diferente da origem). Observe que o sistema linearizado é instável e o sistema não-linear também é.

Para ilustrar quando o comportamento de um sistema não linear não corresponde ao do linearizado em torno do equilíbrio, apresenta-se a seguir um exemplo de um sistema cujas equações do sistema linearizado apresentam um ponto de equilíbrio não hiperbólico.

**Exemplo 4** Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}$$

Este sistema apresenta um ponto de equilíbrio na origem. O sistema linearizado possui autovalores  $\pm j$  o que corresponde a um centro. O comportamento do sistema não linear pode ser analisado a partir da sua representação polar

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (6)$$

fornecendo

$$\dot{r} = -\mu r^3, \quad \dot{\theta} = 1 \quad (7)$$

A partir destas equações pode-se ver que a solução do sistema não linear lembra um foco estável para  $\mu > 0$  e um foco instável para  $\mu < 0$ . Portanto, o comportamento qualitativo descrito pela sua linearização no ponto de equilíbrio não corresponde ao comportamento do sistema não linear na vizinhança deste ponto.

### 3.1.3 Ciclo Limite

Oscilação é um importante fenômeno de sistemas dinâmicos. A solução de um sistema periódico ou oscilador é do tipo

$$x(t+T) = x(t) \quad \forall t > 0, T > 0 \quad (8)$$

Seja o sistema linear

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (9)$$

Suponha que  $A$  tenha autovalores  $\lambda_1 = j\beta, \lambda_2 = -j\beta$  e portanto o ponto de equilíbrio (origem) é um centro. A partir de uma transformação linear  $z = Tx$  pode-se obter a forma de Jordan real para o sistema

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix} z. \quad (10)$$

Utilizando coordenadas polares definidas por  $z_1 = r\cos\theta$  e  $z_2 = r\sin\theta$ , pode-se reescrever o sistema (10) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0 \\ \dot{\theta} &= \beta\end{aligned}\tag{11}$$

A solução é portanto do tipo

$$\begin{aligned}z_1(t) &= r_0\cos(\beta t + \theta_0) \\ z_2(t) &= r_0\sin(\beta t + \theta_0)\end{aligned}\tag{12}$$

com  $r_0 = \sqrt{z_1^2(0) + z_2^2(0)}$  e  $\theta_0 = \tan^{-1}\frac{z_2(0)}{z_1(0)}$ . Portanto, este sistema possui uma oscilação mantida de amplitude  $r_0$  e é referenciado como um oscilador harmônico. Observe que a amplitude da oscilação depende das condições iniciais e também que esta oscilação mantida pode ser destruída com uma pequena perturbação nos autovalores complexos puros da matriz  $A$  que os transforme em autovalores complexos com parte real positiva. O que significa que este oscilador linear não é estruturalmente estável.

**Observação 1** A matriz de transformação  $T$  para gerar a forma de Jordan é da forma  $T = Q^{-1}$  com  $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ ,  $n$  a dimensão de  $x$  e  $q_i, i = 1, \dots, n$  os autovetores da matriz  $A$ . Para obter a forma real de Jordan (conhecida como forma modal) a matriz de transformação é, p. exemplo, para  $n = 2$  é

$$Q = [q_1 q_2] \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5j \\ 0.5 & 0.5j \end{bmatrix}.\tag{13}$$

Assim, a matriz da forma modal do sistema denotada  $A_m$  pode ser obtida a partir da transformação  $A_m = Q^{-1}AQ$ .

**Exercício 1 (Oscilador não linear)** Considere o oscilador de Van Der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2.\end{aligned}$$

Verificar que este oscilador possui apenas a origem como ponto de equilíbrio e caracterizar a existência de um ciclo limite estável para  $\epsilon$  positivo e instável para  $\epsilon$  negativo utilizando as seguintes funções de energia

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2; \\ V(x) &= \frac{1}{2}\{x_1^2 + [\epsilon(\frac{x_1^3}{3} - x_1) + x_2]^2\}.\end{aligned}$$

**Teorema 2 (Poincare)** Se um ciclo limite existir em um sistema autônomo de segunda ordem então  $N = S + 1$  com  $N$  número de nós, centros e focos contidos dentro do ciclo limite e  $S$  o número de selas também contidas dentro do ciclo limite

**Teorema 3 (Poincare-Bendixson)** *Se uma trajetória de um sistema autônomo de segunda ordem permanecer em uma região finita  $\Omega$  do plano de fase, então uma das seguintes situações ocorrem*

1. a trajetória vai para o ponto de equilíbrio
2. a trajetória tende assintoticamente para um ciclo limite estável
3. a trajetória é um ciclo limite

. O seguinte teorema estabelece uma condição suficiente para a não-existência de um ciclo limite.

**Teorema 4 (Bendixson)** *Para o sistema não linear (15), nenhum ciclo limite pode existir em uma região  $\Omega$  do plano de fase na qual*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \quad (14)$$

não se anula e não troca de sinal.

**Exemplo 5** *Verificar que o sistema abaixo não apresenta ciclo limite:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(x_2) + 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= h(x_1) + 4x_1^2x_2. \end{aligned}$$

## 4 Segundo Método de Lyapunov

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0. \quad (15)$$

A idéia básica do 2o. Método de Lyapunov refere-se à energia total do sistema. Se um sistema possui um estado de equilíbrio estável  $x_e$ , então a energia total armazenada no sistema decresce com o tempo até a energia total atingir o seu valor mínimo no estado de equilíbrio  $x_e$ . A estabilidade é analisada via uma função escalar especial chamada função de Lyapunov.

**Definição 12** *A função de Lyapunov  $V(x)$  satisfaz as seguintes condições para todo  $t_1 > t_0$  e para todo  $x$  na vizinhança de  $x = 0$ , com  $x = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x)$ :*

1.  $V(x)$  e suas derivadas parciais são definidas e são contínuas.
2.  $V(0) = 0$

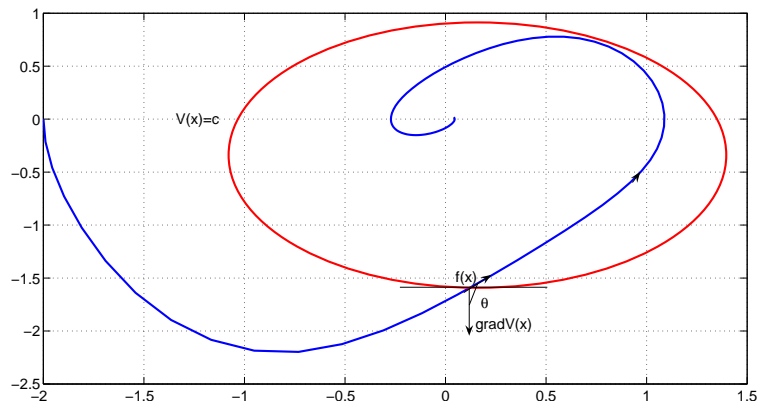


Figura 4: Sistema estável:  $\cos\theta = \frac{\langle \text{Grad}_x V f(x) \rangle}{\|\text{Grad}_x V\| \|f(x)\|} < 0$ .

3.  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$  e  $\dot{V}(x) \leq 0$ , onde  $\dot{V}(x)$  é a derivada de  $V(x)$  em relação às trajetórias de  $\dot{x} = f(x)$ , i.e.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{dV(x)}{dt} = [\text{grad}_x V]^T \dot{x} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned}$$

Nota-se que a derivada de  $V(x)$  é o produto escalar de dois vetores. A função  $f(x)$  é um vetor que aponta no sentido da tangente da trajetória  $x(t)$  do sistema naquele ponto, e  $\text{grad}_x V(x)$  é um vetor normal, no sentido de crescimento de  $V(x)$  em relação à uma curva de nível  $V(x) = c, c > 0$ . A Figura 4 ilustra o caso em que a derivada de  $V(x)$  é negativa.

**Teorema 5** *Suponha que uma  $V(x)$  possa ser determinada para o sistema (15). Então, o estado de equilíbrio  $x = 0$  é assintoticamente estável se  $\dot{V}(x)$  for negativa definida e estável no sentido de Lyapunov se  $\dot{V}(x)$  for negativa semi-definida.*

**Corolário 1 (Princípio de invariância de La Salle)** *Suponha  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio de (15). Suponha  $V(x) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$  é uma função definida positiva continuamente diferenciável em  $\mathcal{D}$  contendo a origem  $x = 0$  tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  em  $\mathcal{D}$ . Defina  $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{D} : \dot{V}(x) = 0\}$  e suponha que a única solução que não deixa  $\mathcal{S}$  é a solução trivial. Então, a origem  $x = 0$  é assintoticamente estável.*

#### 4.1 Caso sistemas lineares

**Teorema 6** *Considere o sistema linear  $\dot{x} = Ax$  com  $\det(A) \neq 0$  e  $x_e = 0$ . Considere  $V(x) = x^T P x, P = P^T > 0$ . Então,  $V(x)$  é uma função de Lyapunov do sistema linear se e só se para qualquer  $Q = Q^T > 0$  existe  $P = P^T > 0$  tal que*

$$A^T P + P A = -Q.$$

Prova. Para  $V(x) = x^T P x$  tem-se  $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$ . Usando  $\dot{x} = Ax$  pode-se escrever  $\dot{V}(x) = x^T A^T P x + x^T P A x$ . Então,  $\dot{V}(x) = x^T [A^T P + P A] x = -x^T Q x < 0, \forall x \neq 0$ .

**Teorema 7** (Estabilidade local) *Se em uma bola  $B_{R_0}$  existe uma função escalar  $V(x)$  com derivadas contínuas tal que*

1.  $V(x) > 0$  localmente
2.  $\dot{V}(x) \leq 0$  localmente em  $B_{R_0}$ .

*Então o ponto de equilíbrio  $x = 0$  é estável. Se  $\dot{V}(x) < 0$  em  $B_{R_0}$  então a estabilidade é assintótica.*

**Exemplo 6** *Seja o pêndulo simples com amortecimento viscoso*

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \text{sen}\theta = 0$$

fazendo  $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$ , considere a função de Lyapunov candidata dada pela função de energia do pêndulo:

$$V(x) = (1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

em que o primeiro  $V(x)$  representa a energia potencial obtida por

$$\int_0^{x_1} \text{sen} z dz$$

e o segundo termo a energia cinética. Observe que  $V(x) > 0$  localmente ( $V(x) = 0$  para  $x \neq 0$  e não atende Definição 12 item 3)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_2 \text{sen} x_1 + x_2(-x_2 - \text{sen} x_1) \\ &= -x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

o que implica  $x_1 = 0$  é estável uma vez que  $\dot{V}(x) \leq 0$  (semidefinida negativa). Considere agora  $V(x) = 2(1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$ . Neste caso obtém-se  $\dot{V}(x) = -x_1^2 + x_1 \text{sen} x_1 \leq 0$  e  $\dot{V}(x)$  é definida negativa localmente e então pode-se afirmar que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável localmente.

**Teorema 8** (Estabilidade global) *Suponha uma função escalar  $V(x)$  com derivadas contínuas tal que*

1.  $V(x) > 0$
2.  $\dot{V}(x) < 0$
3.  $V(x) \rightarrow \infty$  quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

*Então, o ponto de equilíbrio 0 é globalmente assintoticamente estável.*

## 4.2 Sistemas discretos no tempo: pontos fixos de mapas

Chama-se de *mapas* os sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de uma forma discreta. Considere o mapa

$$x_{k+1} = F(x_k; u(k)) \quad (16)$$

onde  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 13** Diz-se que  $x_e$  é um ponto fixo, para  $u = u_e$ , se  $x_e = F(x_e; u_e)$ .

Da mesma forma que no caso dos sistemas contínuos no tempo, para estudar a estabilidade de pontos fixos de mapas faz-se uma linearização na sua vizinhança. Assim, seja  $y$  uma pequena perturbação feita em  $x_e$  de tal forma que

$$x_e + y_{k+1} = F(x_e + y_k; u_e).$$

Expandindo  $F$  em série de Taylor em torno de  $x_e$

$$x_e + y_{k+1} = F(x_e, u_e) + [grad_x F]^T|_{x_e, u_e} y_k + (\text{termos de ordem superior})$$

e usando o fato de que  $x_e = F(x_e; u_e)$  fica-se com

$$y_{k+1} = [grad_x F]^T|_{x_e, u_e} y_k = Ay_k,$$

onde  $A = [grad_x F]^T|_{x_e, u_e}$  é, como no caso dos sistemas contínuos, a matriz das derivadas parciais de  $F$  calculada em  $(x_e; u_e)$ .

A classificação da estabilidade do ponto fixo é feita com base nos autovalores da matriz  $A$ . Seja  $\lambda$  o vetor dos autovalores de  $A$ , diz-se que o ponto fixo  $x_e$  é *hiperbólico* se  $|\lambda_i| \neq 1$ , para todo  $i$ . Se pelo menos um dos autovalores tiver módulo igual a 1, diz-se que  $x_e$  é um ponto fixo *não hiperbólico*.

**Definição 14** Se os módulos de alguns dos autovalores de  $A$  forem menor que 1,  $|\lambda| < 1$ , enquanto os outros forem maior que 1,  $|\lambda| > 1$ , o ponto fixo  $x_e$  é chamado de *sela*.

**Definição 15** Se todos os autovalores de  $A$  tiverem módulo menor que 1, diz-se que o ponto fixo é *assintoticamente estável*.

**Definição 16** Se pelo menos um dos autovalores de  $A$  tiverem módulo maior que 1 o ponto fixo é *instável*.

O estudo da estabilidade de um ponto fixo não hiperbólico é um pouco mais complicado, precisa-se fazer uma análise dos termos de segunda de ordem da aproximação, que despreza-se na linearização.

Um ponto  $x_e$  do mapa (8) que satisfaz a condição

$$x_e = F^k(x_e; u_e)$$

onde  $k \geq 1$ , é chamado *ponto periódico de ordem  $k$*  do mapa  $F$ . Nota-se que  $x_e$  pode também ser dito um ponto fixo do mapa  $G = F^k$ , que é formado por  $k$  iterações sucessivas do mapa  $F$ .



### 4.3 Bifurcações

O comportamento de sistemas dinâmicos dependem, em geral, de um vetor de parâmetros que é chamado de parâmetros de controle. Uma *bifurcação* é o que chama-se de uma mudança qualitativa no plano de fase do sistema dinâmico. No espaço de controle, o ponto onde essa mudança ocorre é chamado de *ponto de bifurcação*.

Do ponto de vista de estabilidade estrutural, o ponto de bifurcação é um ponto onde o sistema perde sua estabilidade. Nesse ponto podem, por exemplo, surgir ou desaparecer pontos fixos, ou pontos instáveis podem ser tornar estáveis e vice-versa. A seguir alguns tipos comuns de bifurcações são descritos.

#### 4.3.1 Tipos de bifurcações

##### 1. Bifurcação sela-nó (ou dobra)

Seja o sistema de dimensão um

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) = \mu - x^2$$

onde  $x, \mu \in \mathbb{R}$  e  $\mu$  é o parâmetro de controle. Os pontos fixos são  $x = \sqrt{\mu}$  e  $x = -\sqrt{\mu}$ . Para  $\mu < 0$  não tem-se pontos fixos. Portanto, pelos critérios vistos,

- para  $x = \sqrt{\mu}$ ,  $\frac{df}{dx} = -2\sqrt{\mu} < 0 \rightarrow$  nó estável.
- para  $x = -\sqrt{\mu}$ ,  $\frac{df}{dx} = 2\sqrt{\mu} > 0 \rightarrow$  nó instável.

O ponto de bifurcação é o ponto  $x = 0$ , onde os dois ramos referentes aos pontos fixos instáveis e estáveis se unem, como visto na Figura 5. Na Figura 5, o equilíbrio estável é um nó (ramo superior), o equilíbrio instável é uma sela (ramo inferior), por isso a bifurcação associada é denominada sela-nó [6].

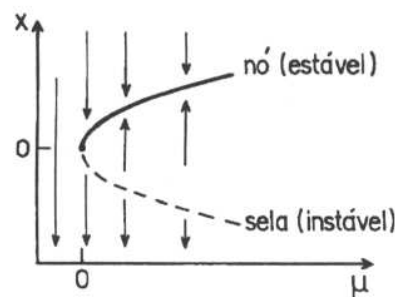


Figura 5: Bifurcação sela-nó [4].

Seja o sistema de dimensão 2 dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) = f_\mu(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) = g_\mu(x_1, x_2).\end{aligned}$$

O único ponto de equilíbrio para todo  $\mu$  é  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Nesse ponto a matriz Jacobiana é

$$J = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

Portanto, os autovalores de  $J$  são  $\lambda_1 = \mu + i$  e  $\lambda_2 = \mu - i$ . Então, o equilíbrio é estável para  $\mu < 0$  e instável para  $\mu > 0$ . Concluí-se que no ponto  $\mu = 0$  tem-se uma perda de estabilidade. A seguir, estuda-se o que ocorre na região  $\mu > 0$ . Usando coordenadas polares, definidas por  $x_1 = r\cos\theta$  e  $x_2 = r\sin\theta$ , pode-se reescrever o sistema da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= -r\sin\theta + r\cos\theta(\mu - r^2), \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= r\cos\theta + r\sin\theta(\mu - r^2).\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por  $\cos\theta$ , a segunda por  $\sin\theta$ , e somando-as tem-se um novo sistema

$$\dot{r} = r(\mu - r^2),$$

e

$$\dot{\theta} = 1.$$

Verifica-se que existe uma órbita periódica para  $\mu > 0$ . De fato, em  $r = \sqrt{\mu}$  tem-se  $\dot{r} = 0$ . Além disso, a órbita é estável já que  $\dot{r} < 0$  para  $r > \sqrt{\mu}$ , e  $\dot{r} > 0$  para  $r < \sqrt{\mu}$ . Pode-se ver claramente como isso ocorre na Figura 6.

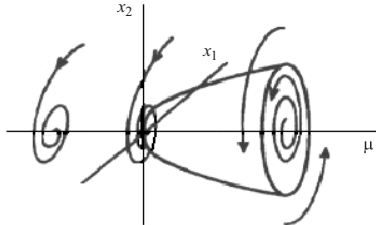


Figura 6: Bifurcação de Hopf.

A bifurcação que ocorre em  $\mu = 0$ , onde passa-se de um equilíbrio para uma oscilação periódica é chamada de *bifurcação de Hopf*. Esse tipo de bifurcação apresenta a interessante característica de ligar um equilíbrio a movimento periódico via variação de  $\mu$ .

## 4.4 Mapas e seção de Poincaré

Uma das maneiras pela qual um sistema contínuo dá origem a um mapa discreto é pela utilização de *seções de Poincaré*. A seção de Poincaré é uma maneira de reduzir o estudo de um fluxo num espaço de fase com  $n$  dimensões a uma aplicação discreta num espaço de fase com  $(n - 1)$  dimensões, chamada *mapa de Poincaré*.

### 4.4.1 Sistema não autônomo

Em sistemas não autônomos, o período associado às órbitas periódicas, geralmente, está claramente explícito. Assim, o período de qualquer solução periódica que aparece no sistema é sempre múltiplo de um período fundamental  $T$ .

Suponha que tem-se um sistema não autônomo representado por uma equação diferencial da forma

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t),$$

ou ainda por

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0,$$

onde  $f(t)$ ,  $a_1(t)$  e  $a_2(t)$  são funções periódicas de período  $T$ . Sabe-se que seu retrato de fase é portanto tridimensional, e cada estado é dado por  $(x, \dot{x}, t)$ . Nesse caso, o mapa de Poincaré pode ser obtido simplesmente considerando-se a interseção da trajetória com plano  $(x, \dot{x})$  a cada período  $T$ , como mostrado na Figura 7.

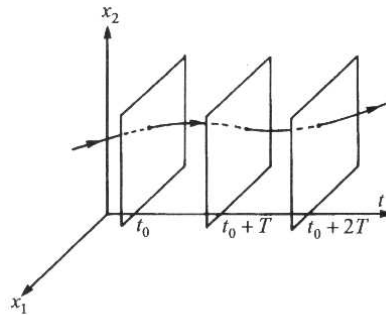


Figura 7: Construção do mapa de Poincaré para um sistema não

### 4.4.2 Sistema autônomo

Seja o sistema dinâmico autônomo  $n$ -dimensional, com soluções periódicas, dado por

$$\dot{x} = F(x).$$

Aqui  $F(x)$  representa um campo vetorial não linear. Seja  $\phi_t(x)$  o fluxo gerado e  $\phi_t(x_0)$  uma órbita periódica de período  $T$ . Seja uma hipersuperfície  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de dimensão  $(n - 1)$ , que contenha  $x_0$ , de tal maneira que o fluxo lhe seja transversal, ou seja,  $\phi_t(x) \cdot n(x) \neq 0$ , onde  $n(x)$  é o vetor normal à hipersuperfície  $\Omega$ . Seja ainda  $U \subseteq \Omega$  uma vizinhança de  $x_0$ .

**Definição 17** Chama-se de mapa de Poincaré a aplicação  $P : U \rightarrow \Omega$  definida para um ponto  $x_1 \in U$  da seguinte maneira

$$P(x_1) = \phi(x_1, \tau)$$

onde  $\tau = \tau(x_1)$  é o tempo necessário para que a órbita  $\phi_t(x_1)$  que parte de  $x_1$  retorne pela primeira vez em  $\Omega$ .

A hipersuperfície  $\Omega$  é chamada de *seção de Poincaré*. Pode-se ver geometricamente a construção de um mapa de Poincaré na Figura 8. Pela construção geométrica do mapa de Poincaré fica explícito a relação entre as órbitas periódicas de um sistema e os pontos fixos dos mapas de Poincaré. Se o mapa de Poincaré de um sistema apresenta um ponto fixo, isso mostra que a trajetória sempre passa por aquele ponto conforme o tempo evolui, indicando que o retrato de fase do sistema deve necessariamente apresentar uma órbita periódica. Como a seção de Poincaré tem dimensão menor que o espaço de fase do sistema correspondente, o mapa de Poincaré pode ser uma ferramenta útil no estudo das órbitas periódicas de um sistema qualquer.

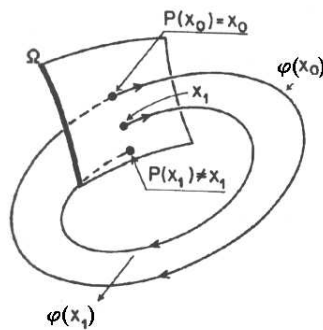


Figura 8: Significado geométrico.

### Exemplo 7 (O oscilador de Duffing)

Seja o sistema massa mola simples do Exemplo 8, onde  $F = mg$  e  $F_{el} = x - x^3$  acrescido de uma excitação periódica  $F(t) = \gamma \cos(\omega t)$  e de uma força dissipativa  $F_d = -c\dot{x}$ , como mostrado na Figura 9. A frequência da força externa é determinada pelo parâmetro  $\gamma$  e a intensidade da força amortecedora por  $c$ . Esse sistema é conhecido como *oscilador de Duffing*. Sua equação de movimento, para  $c = \epsilon$  e considerando agora que  $x = 0$  está na posição de repouso do sistema, pode ser obtida pelo método visto na seção anterior, chegando a

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x} - x + x^3 - \gamma \cos(\omega t) = 0.$$

Usando o aplicativo *Matlab* traça-se o retrato de fase  $x - \dot{x}$  e o mapa de Poincaré correspondente do oscilador para  $\gamma = -0.3$ ,  $\omega = 1$ , condição inicial igual a  $(0, 0)$  e diferentes valores da constante de amortecimento  $\epsilon$ . O programa desenvolvido para este exemplo encontra-se descrito no Apêndice (Seção B). Para  $\epsilon = 0, 22$  as Figuras 10, 11 e 12 ilustram os resultados obtidos.

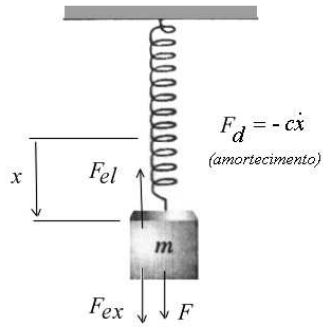


Figura 9: Oscilador de Duffing.

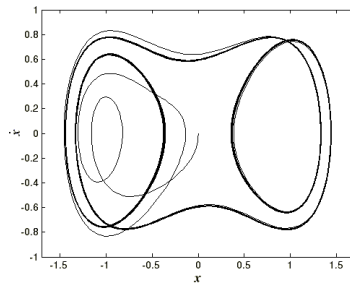


Figura 10: Retrato de fase para  $\epsilon = 0,22$  e  $0 \leq t \leq 1000$ .

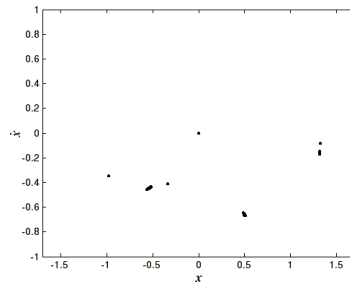


Figura 11: Seção de Poincaré para  $\epsilon = 0,22$  e  $t = 2k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, 1000$ .

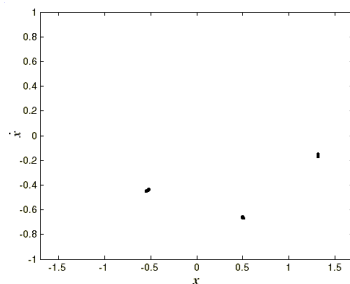


Figura 12: Seção de Poincaré para  $\epsilon = 0,22$  e  $t = 2k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, 1000$  sem transiente.

Observa-se que o mapa de poincaré (Figura 11) mostra claramente o que o retrato de fase (Figura 10) parece esconder um pouco: a presença de três órbitas periódicas, que ficam ainda mais visíveis quando elimina-se a parte do transiente do tempo e analisa-se o sistema em regime (Figura 11).

–Para  $\epsilon = 0,25$  as Figuras 13, 14 ilustram os resultados obtidos.

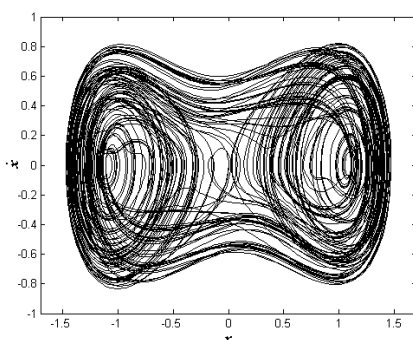


Figura 13: Retrato de fase para  $\epsilon = 0,25$  e  $0 \leq t \leq 1000$ .

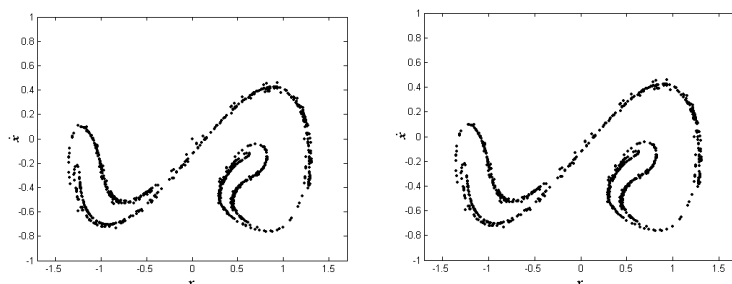


Figura 14: Seção de Poincaré para  $\epsilon = 0,25$  e  $t = 2k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, 1000$  com transiente (esquerda) e sem transiente para  $k = 100, 101, \dots, 1000$  (direita)

Observa-se que aumentando o valor de  $\epsilon$  para  $0,25$ , o sistema deixa de apresentar as soluções periódicas que tinha anteriormente, conforme pode-se comprovar observando os mapa de poincaré obtidos, os quais agora possuem muitos pontos espalhados por todo o plano  $x - \dot{x}$ , mesmo quanto retirado o tempo transiente. Esse espalhamento nos mostra que dada uma condição inicial, a trajetória que descreve o comportamento do sistema no tempo dificilmente voltará a passar pelo mesmo ponto após um número inteiro do período  $T$  característico do sistema. Esse tipo de comportamento é uma característica de sistemas que apresentam caos.

Comparando as duas situações, pode-se concluir que provavelmente deve haver um ponto de bifurcação no espaço de estado-controlado onde o sistema perde a característica de de comportamento periódico para assumir um comportamento caótico.

# A Obtenção de Equações de Sistemas Dinâmicos via Equações de Lagrange

## A.1 Formulação Lagrangeana

A formulação Lagrangeana nos dá uma forma alternativa, em relação as equações de Newton, para escrever as equações do movimento. Utiliza-se das expressões da energia de um sistema, como se fizesse um balanceamento das energias.

### A.1.1 Sistemas conservativos

A equação que representa o movimento de uma partícula é dada por

$$F_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) \quad (17)$$

onde  $F_i$  são as componentes da força em relação a cada uma das coordenadas  $x_i$ , e  $m_i$  é a massa da partícula. Sua energia cinética é definida como

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2.$$

Se derivar-se a energia cinética  $T$  em relação a  $x_i$ , tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 2 \frac{1}{2} (m_i \dot{x}_i) = m_i \dot{x}_i.$$

Substituindo esta derivada na equação do movimento tem-se

$$F_i = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right). \quad (18)$$

Da definição de sistema conservativo sabe-se que

$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ , onde  $V = V(x_i)$  é a energia potencial do sistema considerado. Substituindo agora esta equação em (18) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (19)$$

Para simplificar, pode-se definir uma função  $L$  como

$$L = T - V$$

para obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial(L+V)}{\partial \dot{x}_i} \right) &= -\frac{\partial(T-L)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} \right) &= -\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial L}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Por definição  $\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = 0$  e  $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$  e a equação se simplifica em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (20)$$

A função  $L$  é chamada de *função Lagrangiana* do sistema e a equação (20) é chamada equação de Lagrange. Com a formulação Lagrangiana, representa-se a função  $L$  do sistema, calculando sua energia potencial e cinética, e assim obtém-se a equação de Lagrange que representa seu movimento.

Como uma aplicação da formulação Lagrangiana, veja o exemplo a seguir, que, apesar de simples, mostra claramente que usando esta formulação obtém-se os mesmos resultados obtidos pelo método clássico de Newton.

**Exemplo 8** Considere um sistema massa-mola simples, como na Figura 15, sem excitação e sem atrito.

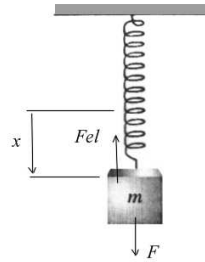


Figura 15: Sistema massa-mola.

### A.1.2 –Pelas equações de Newton

:

$$F = mg,$$

$$F_{el} = -kx.$$

Analisando as forças no sistema tem-se

$$F + F_{el} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$mg - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

como  $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ , a equação de movimento para o sistema é

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - g = 0$$



### A.1.3 Pelo Lagrangiano

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

e

$$V = -mgx + \frac{1}{2}kx^2.$$

Então

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - (-mgx + \frac{1}{2}kx^2)$$

e chega-se a

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2.$$

A equação de Lagrange em relação a  $x$  é da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2)}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2 \right) = 0.$$

Assim

$$\frac{\partial(m\dot{x})}{\partial t} - (mg - kx) = 0$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - g = 0$$

Obtendo-se, portanto, a mesma equação diferencial.

### A.1.4 Sistemas não-conservativos

A formulação Lagrangeana também pode ser aplicada, de uma maneira muito simples, a alguns casos de sistemas não-conservativos. Considera-se aqui o caso mais simples e mais típico dentre as forças dissipativas, que é quando estas variam com a velocidade na forma

$$F_{dis} = -k_i\dot{x}_i,$$

onde  $k_i$  é uma constante qualquer. Nesse caso define-se uma nova quantidade

$$R = \frac{1}{2}k_i\dot{x}_i^2$$

chamada *função dissipação de Rayleigh* [5]. Então,

$$F_{dis} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}.$$

Assim, a equação de Lagrange, incluindo a nova parcela referente às forças dissipativas, é dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

**Exemplo 9** Considere um sistema semelhante ao do Exemplo 8, onde adiciona-se mais uma força devido ao atrito, dada por

$$F_{dis} = -c\dot{x}.$$

### A.1.5 –Pelas equações de Newton

$$F + F_{el} + F_{dis} = m\ddot{x}$$

portanto

$$mg - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

ou

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{k}{m}x - mg = 0.$$

### A.1.6 –Pelo Lagrangeano

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2$$

e

$$R = \frac{1}{2}c\dot{x}^2.$$

Aplicando a formulação para sistemas não-conservativos pode-se escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

Substituindo  $L$  e  $R$  na equação de Lagrange, tem-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx - \frac{1}{2}kx^2)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\frac{1}{2}c\dot{x}^2)}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

e chega-se a

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - mg + kx + c\dot{x} = 0$$

ou

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{k}{m}x - mg = 0.$$

Novamente, neste exemplo, obtém-se as mesmas equações obtidas pelo método clássico.

## B Programas no Matlab do oscilador de Duffing

Programa desenvolvido para obtenção do retrato de fase e do mapa de Poincaré para o Oscilador de Duffing utilizando o aplicativo *Matlab*

– Programa principal:

```
clear all (comandos de limpeza das variáveis)
close all
clc
```

```
t=[0:0.1:1000]; (Intervalo de tempo para obtenção do retrato de fase)
```

```
t1= [0:2*pi:2000*pi]; (Intervalo de tempo com período fixo para a obtenção do mapa de Poincaré)
```

```
x1=[0 0]; (Condições iniciais)
```

```
[t,x]=ode45('duf1',t,x1); (Obtenção do vetor de estados do sistema o retrato de fase utilizando a subrotina “duf1”)
```

```
[t,y]=ode45('duf1',t1,x1); (Obtenção do vetor de estados para o mapa de Poincaré utilizando a subrotina “duf1”)
```

```
for i=1:1001, (Eliminação da parte transiente)
j=100+i;
if j < 1001,
z(i,1)=y(j,1);
z(i,2)=y(j,2);
end;
end;
```

```
figure
plot(x(:,1),x(:,2)) (Gráfico  $x(t)$  vs.  $x'(t)$  do retrato de fase)
```

```
figure
plot(y(:,1),y(:,2),'.') (Gráfico  $x(t)$  vs.  $x'(t)$  do mapa de Poincaré (com transiente))
```

```
figure
plot(z(:,1),z(:,2),'.') (Gráfico  $x(t)$  vs.  $x'(t)$  do mapa de Poincaré (sem transiente))
```

– Subrotina de declaração da equação diferencial do sistema (para  $\epsilon = 0, 22$ )

```
function [xdot] = duf1c(t,x)
% [xdot]= naonlinear(t,x)
```

```
% Simula um sistema dinâmico não- linear %  
epsilon=0.22; (Declara o valor da constante  $\epsilon$ )  
gama=-0.3; (Declara o valor da constante  $\gamma$ )  
omega=1; (Declara o valor da constante  $\omega$ )  
  
xdot=[x(2);x(1)-x(1)^3-epsilon*x(2)+gama*cos(omega*t)] (Equação diferencial do sistema);
```

## Referências

- [1] Slotine, J.J.E. *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [2] Khalil, H. *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 1996.
- [3] Nayfeh, A. H. e Balachandram, B., *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*, Wiley-Interscience Publication, 1995.
- [4] Fiedler-Ferrara, N. e Prado, C. P. C., *Caos: Uma Introdução*, Edgard Blücher, 1994.
- [5] Leech, J. W., *Mecânica Analítica*, ed. Ao Livro Técnico EDUSP, 1971.
- [6] Argyris, J., Faust, C. e Haase, M., *An Exploration of Chaos*, North-Holland, 1994.
- [7] Jantzen, J., *Foundations of Fuzzy Control*, Wiley, 2007.